2004年　東大数学　文系第3問

(1) 易. 教科書の例題

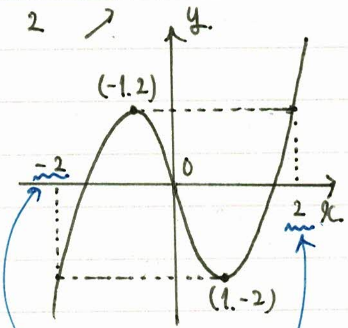
$y=f(x)$ と $y=a$ との共有点の個数を調べる。

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

増減表は

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	2	↗

グラフは右のようになる。



後で使うので.
$f(x)=2$ の解が $x=2$
$f(x)=-2$ 〃 $x=-2$
を調べておくと良い

よって.

$a<-2,\ 2<a$ で 1コ
$a=\pm 2$ で 2コ
$-2<a<2$ で 3コ

(2) $g(x)=0$

$\{f(x)\}^3 - 3f(x) = 0$

$f(x)\left(\{f(x)\}^2 - 3\right) = 0$

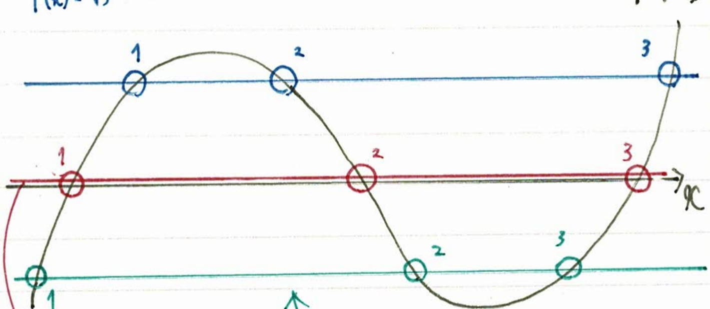
$\therefore f(x) = 0,\ \pm\sqrt{3}.$

$0,\ \pm\sqrt{3}$ の3解は、全て $-2 < f(x) < 2$ を満たすため.

(1) の「$-2<a<2$ で 3コ」に該当する。

よって、それぞれに3つの x の解が対応するので

$3\times 3 = $ 9個//



タマタマ. 解が

(3) $h(x)=0$

$\{g(x)\}^3 - 3g(x) = 0$

$\therefore g(x) = 0,\ \pm\sqrt{3}.$

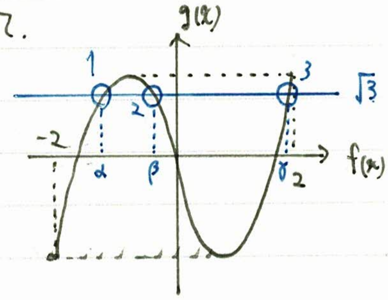
この3解のうち、$g(x)=0$ に対応する解は、(2)より 9コ

・$g(x)=\sqrt{3}$ を考える。

$\{f(x)\}^3 - 3f(x) = \sqrt{3}$ は、(2) のように具体的な値として解けないが、

(1) のグラフを利用して.

右の図のように、$-2 < f(x) < 2$ の範囲に3つ存在することがわかる。



その3つを、α, β, γ とすると、

$f(x)=\alpha, \beta, \gamma$ を満たす解も、((1)の「$-2<a<2$ で3コ」に該当するため)

x の解が3コずつ対応する。

つまり、$g(x)=\sqrt{3}$ の解は、9コ.

・$g(x)=-\sqrt{3}$ のときも、同様に、9コ.

以上から、27コ//

$g(x)$ は、「$f(x)$ が2回分」のような関数(合成という)

つまり $f\{f(x)\}$

$f(x)=0$ の解が3コ、$g(x)=0$ の解は、3^2コになる。

$h(x)$ は更にもう1回、$f(x)$ を $f(x)$ に代入する。

すると、$h(x)=0$ の解は 3^3個 になる。